12081CH04

अध्याय 4

सारणिक (Determinants)

❖ *All Mathematical truths are relative and conditional — C.P. STEINMETZ* ❖

4.1 भूमिका (Introduction)

P.S. Laplace
(1749-1827)

पिछले अध्याय में, हमने आव्यूह और आव्यूहों के बीजगणित के विषय में अध्ययन किया है। हमने बीजगणितीय समीकरणों के निकाय को आव्यूहों के रूप में व्यक्त करना भी सीखा है। इसके अनुसार रैखिक समीकरणों के निकाय

$$a_1 x + b_1 y = c_1$$
$$a_2 x + b_2 y = c_2$$

को $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ के रूप में व्यक्त कर सकते हैं। अब इन समीकरणों के निकाय का अद्वितीय हल है अथवा नहीं, इसको $a_1 b_2 - a_2 b_1$ संख्या द्वारा ज्ञात किया जाता है। (स्मरण कीजिए कि यदि $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ या $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$, हो तो समीकरणों के निकाय का हल अद्वितीय होता है) यह संख्या $a_1 b_2 - a_2 b_1$ जो समीकरणों के निकाय के अद्वितीय हल ज्ञात करती है, वह आव्यूह $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$ से संबंधित है और इसे A का **सारणिक या det A** कहते हैं। सारणिकों का इंजीनियरिंग, विज्ञान, अर्थशास्त्र, सामाजिक विज्ञान इत्यादि में विस्तृत अनुप्रयोग हैं।

इस अध्याय में, हम केवल वास्तविक प्रविष्टियों के 3 कोटि तक के सारणिकों पर विचार करेंगे। इस अध्याय में सारणिकों के गुण धर्म, उपसारणिक, सह-खण्ड और त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करने में सारणिकों का अनुप्रयोग, एक वर्ग आव्यूह के सहखंडज और व्युत्क्रम, रैखिक समीकरण के निकायों

© NCERT not to be republished

की संगतता और असंगतता और एक आव्यूह के व्युत्क्रम का प्रयोग कर दो अथवा तीन चरांकों के रैखिक समीकरणों के हल का अध्ययन करेंगे।

4.2 सारणिक (Determinant)

हम n कोटि के प्रत्येक वर्ग आव्यूह $A = [a_{ij}]$ को एक संख्या (वास्तविक या सम्मिश्र) द्वारा संबंधित करा सकते हैं जिसे वर्ग आव्यूह का सारणिक कहते हैं। इसे एक फलन की तरह सोचा जा सकता है जो प्रत्येक आव्यूह को एक अद्वितीय संख्या (वास्तविक या सम्मिश्र) से संबंधित करता है।

यदि M वर्ग आव्यूहों का समुच्चय है, k सभी संख्याओं (वास्तविक या सम्मिश्र) का समुच्चय है और $f : M \to K, f(A) = k$, के द्वारा परिभाषित है जहाँ $A \in M$ और $k \in K$ तब $f(A)$, A का सारणिक कहलाता है। इसे $|A|$ या det (A) या Δ के द्वारा भी निरूपित किया जाता है।

यदि $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, तो A के सारणिक को $|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ = det (A) द्वारा लिखा जाता है।

टिप्पणी

(i) आव्यूह A के लिए, $|A|$ को A का सारणिक पढ़ते हैं।

(ii) केवल वर्ग आव्यूहों के सारणिक होते हैं।

4.2.1 *एक कोटि के आव्यूह का सारणिक (Determinant of a matrix of order one)*

माना एक कोटि का आव्यूह $A = [a]$ हो तो A के सारणिक को a के बराबर परिभाषित किया जाता है।

4.2.2 *द्वितीय कोटि के आव्यूह का सारणिक (Determinant of a matrix of order two)*

माना 2×2 कोटि का आव्यूह $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ है।

तो A के सारणिक को इस प्रकार से परिभाषित किया जा सकता है:

$$\det(A) = |A| = \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ A_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

उदाहरण 1 $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2(2) - 4(-1) = 4 + 4 = 8$

© NCERT not to be republished

उदाहरण 2 $\begin{vmatrix} x & x+1 \\ x-1 & x \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल $\begin{vmatrix} x & x+1 \\ x-1 & x \end{vmatrix} = x\,(x) - (x+1)\,(x-1) = x^2 - (x^2 - 1) = x^2 - x^2 + 1 = 1$

4.2.3 3 × 3 कोटि के आव्यूह का सारणिक (*Determinant of a matrix of order* 3 × 3)

तृतीय कोटि के आव्यूह के सारणिक को द्वितीय कोटि के सारणिकों में व्यक्त करके ज्ञात किया जाता है। यह एक सारणिक का एक पंक्ति (या एक स्तंभ) के अनुदिश प्रसरण कहलाता है। तृतीय कोटि के सारणिक को छः प्रकार से प्रसारित किया जाता है तीनों पंक्तियों (R_1, R_2 तथा R_3) में से प्रत्येक के संगत और तीनों स्तंभ (C_1, C_2 तथा C_3) में से प्रत्येक के संगत दर्शाए गए प्रसरण समान परिणाम देते हैं जैसा कि निम्नलिखित स्थितियों में स्पष्ट किया गया है।

वर्ग आव्यूह $A = [a_{ij}]_{3\times 3}$, के सारणिक पर विचार करते हैं।

जहाँ $$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

प्रथम पंक्ति (R_1) के अनुदिश प्रसरण

$$|A| = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} & \boldsymbol{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

चरण 1 R_1 के पहले अवयव a_{11} को $(-1)^{(1+1)}$ $[(-1)^{a_{11} \text{ में अनुलग्नों का योग}}]$ और सारणिक |A| की पहली पंक्ति (R_1) तथा पहला स्तंभ (C_1) के अवयवों को हटाने से प्राप्त द्वितीय कोटि के सारणिक से गुणा कीजिए क्योंकि a_{11}, R_1 और C_1 में स्थित है

अर्थात् $$(-1)^{1+1}\, a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

चरण 2 क्योंकि a_{12}, R_1 तथा C_2 में स्थित है इसलिए R_1 के दूसरे अवयव a_{12} को $(-1)^{1+2}$ $[(-1)^{a_{12} \text{ में अनुलग्नों का योग}}]$ और सारणिक |A| की पहली पंक्ति (R_1) व दूसरे स्तंभ (C_2) को हटाने से प्राप्त द्वितीय क्रम के सारणिक से गुणा कीजिए

अर्थात् $$(-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

चरण 3 क्योंकि a_{13}, R_1 तथा C_3 में स्थित है इसलिए R_1 के तीसरे अवयव को $(-1)^{1+3}$ $[(-1)^{a_{13} \text{ में अनुलग्नों का योग}}]$ और सारणिक |A| की पहली पंक्ति (R_1) व तीसरे स्तंभ (C_3) को हटाने से प्राप्त तृतीय कोटि के सारणिक से गुणा कीजिए

© NCERT not to be republished

अर्थात् $$(-1)^{1+3} a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

चरण 4 अब A का सारणिक अर्थात् | A | के व्यंजक को उपरोक्त चरण 1, 2 व 3 से प्राप्त तीनों पदों का योग करके लिखिए अर्थात्

$$\det A = |A| = (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)^{1+3} a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

या $$|A| = a_{11} (a_{22} a_{33} - a_{32} a_{23}) - a_{12} (a_{21} a_{33} - a_{31} a_{23}) + a_{13} (a_{21} a_{32} - a_{31} a_{22})$$

$$= a_{11} a_{22} a_{33} - a_{11} a_{32} a_{23} - a_{12} a_{21} a_{33} + a_{12} a_{31} a_{23} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{31} a_{22} \quad \dots (1)$$

टिप्पणी हम चारों चरणों का एक साथ प्रयोग करेंगे।

द्वितीय पंक्ति (R_2) के अनुदिश प्रसरण

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} & \boldsymbol{a_{23}} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

R_2 के अनुदिश प्रसरण करने पर, हमें प्राप्त होता है

$$|A| = (-1)^{2+1} a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)^{2+3} a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= - a_{21} (a_{12} a_{33} - a_{32} a_{13}) + a_{22} (a_{11} a_{33} - a_{31} a_{13}) - a_{23} (a_{11} a_{32} - a_{31} a_{12})$$

$$|A| = - a_{21} a_{12} a_{33} + a_{21} a_{32} a_{13} + a_{22} a_{11} a_{33} - a_{22} a_{31} a_{13} - a_{23} a_{11} a_{32} + a_{23} a_{31} a_{12}$$

$$= a_{11} a_{22} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{31} a_{22} \quad \dots (2)$$

© NCERT not to be republished

पहले स्तंभ (C_1) के अनुदिश प्रसरण

$$|A| = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ \boldsymbol{a_{21}} & a_{22} & a_{23} \\ \boldsymbol{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

C_1, के अनुदिश प्रसरण करने पर हमें प्राप्त होता है

$$|A| = a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{21}(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$+ a_{31}(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})$$

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{21}a_{12}a_{33} + a_{21}a_{13}a_{32} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{13}a_{22}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{31}a_{22} \quad \ldots (3)$$

(1), (2) और (3) से स्पष्ट है कि $|A|$ का मान समान है। यह पाठकों के अभ्यास के लिए छोड़ दिया गया है कि वे यह सत्यापित करें कि $|A|$ का R_3, C_2 और C_3 के अनुदिश प्रसरण (1), (2) और (3) से प्राप्त परिणामों के समान है।

अतः एक सारणिक को किसी भी पंक्ति या स्तंभ के अनुदिश प्रसरण करने पर समान मान प्राप्त होता है।

टिप्पणी

(i) गणना को सरल करने के लिए हम सारणिक का उस पंक्ति या स्तंभ के अनुदिश प्रसरण करेंगे जिसमें शून्यों की संख्या अधिकतम होती है।

(ii) सारणिकों का प्रसरण करते समय $(-1)^{i+j}$ से गुणा करने के स्थान पर, हम $(i+j)$ के सम या विषम होने के अनुसार +1 या –1 से गुणा कर सकते हैं।

(iii) मान लीजिए $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ और $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ तो यह सिद्ध करना सरल है कि $A = 2B$. किंतु $|A| = 0 - 8 = -8$ और $|B| = 0 - 2 = -2$ है।

अवलोकन कीजिए कि $|A| = 4(-2) = 2^2|B|$ या $|A| = 2^n|B|$, जहाँ $n = 2$, वर्ग आव्यूहों A व B की कोटि है।

व्यापक रूप में, यदि $A = kB$, जहाँ A व B वर्ग आव्यूहों की कोटि n है, तब $|A| = k^n\,|B|$, जहाँ $n = 1, 2, 3$ है।

उदाहरण 3 सारणिक $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल ध्यान दीजिए कि तीसरे स्तंभ में दो प्रविष्टियाँ शून्य हैं। इसलिए तीसरे स्तंभ (C_3) के अनुदिश प्रसरण करने पर हमें प्राप्त होता है कि

$$\Delta = 4\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 4(-1-12) - 0 + 0 = -52$$

उदाहरण 4 $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & \sin\alpha & -\cos\alpha \\ -\sin\alpha & 0 & \sin\beta \\ \cos\alpha & -\sin\beta & 0 \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल R_1 के अनुदिश प्रसरण करने पर हमें प्राप्त होता है कि

$$\Delta = 0\begin{vmatrix} 0 & \sin\beta \\ -\sin\beta & 0 \end{vmatrix} - \sin\alpha\begin{vmatrix} -\sin\alpha & \sin\beta \\ \cos\alpha & 0 \end{vmatrix} - \cos\alpha\begin{vmatrix} -\sin\alpha & 0 \\ \cos\alpha & -\sin\beta \end{vmatrix}$$

$$= 0 - \sin\alpha\,(0 - \sin\beta\cos\alpha) - \cos\alpha\,(\sin\alpha\sin\beta - 0)$$

$$= \sin\alpha\sin\beta\cos\alpha - \cos\alpha\sin\alpha\sin\beta = 0$$

उदाहरण 5 यदि $\begin{vmatrix} 3 & x \\ x & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$ तो x के मान ज्ञात कीजिए।

हल दिया है कि $\begin{vmatrix} 3 & x \\ x & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$

अर्थात् $$3 - x^2 = 3 - 8$$

अर्थात् $$x^2 = 8$$

अतः $$x = \pm 2\sqrt{2}$$

प्रश्नावली 4.1

प्रश्न 1 से 2 तक में सारणिकों का मान ज्ञात कीजिए

1. $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -5 & -1 \end{vmatrix}$

2. (i) $\begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}$ (ii) $\begin{vmatrix} x^2 - x + 1 & x - 1 \\ x + 1 & x + 1 \end{vmatrix}$

3. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$, तो दिखाइए $|2A| = 4|A|$

4. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ हो, तो दिखाइए $|3A| = 27|A|$

5. निम्नलिखित सारणिकों का मान ज्ञात कीजिए

(i) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 3 & -5 & 0 \end{vmatrix}$ (ii) $\begin{vmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ (iii) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$

(iv) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & -5 & 0 \end{vmatrix}$

6. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 9 \end{bmatrix}$, हो तो $|A|$ ज्ञात कीजिए।

7. x के मान ज्ञात कीजिए यदि

(i) $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & 4 \\ 6 & x \end{vmatrix}$ (ii) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 3 \\ 2x & 5 \end{vmatrix}$

© NCERT not to be republished

8. यदि $\begin{vmatrix} x & 2 \\ 18 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 18 & 6 \end{vmatrix}$ हो तो x बराबर है:

(A) 6 (B) ± 6 (C) – 6 (D) 0

4.3 सारणिकों के गुणधर्म (Properties of Determinants)

पिछले अनुच्छेद में हमने सारणिकों का प्रसरण करना सीखा है। इस अनुच्छेद में हम सारणिकों के कुछ गुणधर्मों को सूचीबद्ध करेंगे जिससे एक पंक्ति या स्तंभ में शून्य की संख्याओं को अधिकतम प्राप्त करने से इनका मान ज्ञात करना सरल हो जाता है। ये गुणधर्म किसी भी कोटि के सारणिक के लिए सत्य हैं किंतु हम स्वयं को इन्हें केवल तीसरी कोटि तक के सारणिकों तक सीमित रखेंगे।

गुणधर्म 1 किसी सारणिक का मान इसकी पंक्तियों और स्तंभों के परस्पर परिवर्तित करने पर अपरिवर्तित रहता है।

सत्यापन – मान लीजिए $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

प्रथम पंक्ति के अनुदिश प्रसरण करने पर, हम प्राप्त करते हैं कि

$$\Delta = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$= a_1 (b_2 c_3 - b_3 c_2) - a_2 (b_1 c_3 - b_3 c_1) + a_3 (b_1 c_2 - b_2 c_1)$$

Δ की पंक्तियों को स्तंभों में परिवर्तित करने पर हमें सारणिक

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$ प्राप्त होता है।

Δ_1 को प्रथम स्तंभ के अनुदिश प्रसरण करने पर हम पाते हैं कि

$$\Delta_1 = a_1 (b_2 c_3 - c_2 b_3) - a_2 (b_1 c_3 - b_3 c_1) + a_3 (b_1 c_2 - b_2 c_1)$$

अतः $\Delta = \Delta_1$

टिप्पणी उपर्युक्त व्याख्या से स्पष्ट है कि यदि A एक वर्ग आव्यूह है तो det (A) = det (A′), जहाँ A′, A का परिवर्त है।

टिप्पणी यदि R_i = i वीं पंक्ति और C_i = i वाँ स्तंभ है, तो पंक्तियों और स्तंभों के परस्पर परिवर्तन को हम संकेतन में $C_i \leftrightarrow R_i$ लिखेंगे।

आइए हम उपरोक्त गुणधर्म को उदाहरण द्वारा सत्यापित करें।

उदाहरण 6 $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 6 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & -7 \end{vmatrix}$ के लिए गुणधर्म 1 का सत्यापन कीजिए।

हल सारणिक का प्रथम पंक्ति के अनुदिश प्रसरण करने पर,

$$\Delta = 2\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} - (-3)\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 1 & -7 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 2\,(0 - 20) + 3\,(-42 - 4) + 5\,(30 - 0)$$

$$= -40 - 138 + 150 = -28$$

पंक्तियों और स्तंभों को परस्पर परिवर्तन करने पर हमें प्राप्त होता है।

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 \\ -3 & 0 & 5 \\ 5 & 4 & -7 \end{vmatrix} \quad \text{(पहले स्तंभ के अनुदिश प्रसरण करने पर)}$$

$$= 2\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 4 & -7 \end{vmatrix} - (-3)\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 4 & -7 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 2\,(0 - 20) + 3\,(-42 - 4) + 5\,(30 - 0)$$

$$= -40 - 138 + 150 = -28$$

स्पष्टत: $\Delta = \Delta_1$

अत: गुणधर्म 1 सत्यापित हुआ।

गुणधर्म 2 यदि एक सारणिक की कोई दो पंक्तियों (या स्तंभों) को परस्पर परिवर्तित कर दिया जाता है, तब सारणिक का चिह्न परिवर्तित हो जाता है।

सत्यापन मान लीजिए $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

प्रथम पंक्ति के अनुदिश प्रसरण करने पर हम पाते हैं

$$\Delta = a_1\,(b_2\,c_3 - b_3\,c_2) - a_2\,(b_1\,c_3 - b_3\,c_1) + a_3\,(b_1\,c_2 - b_2\,c_1)$$

पहली और तीसरी पंक्तियों को परस्पर परिवर्तित करने अर्थात् $R_2 \leftrightarrow R_3$ से प्राप्त नया सारणिक

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}$$

है। इसे तीसरी पंक्ति के अनुदिश प्रसरण करने पर,

$$\Delta_1 = a_1 (c_2 b_3 - b_2 c_3) - a_2 (c_1 b_3 - c_3 b_1) + a_3 (b_2 c_1 - b_1 c_2)$$

$$= -[a_1 (b_2 c_3 - b_3 c_2) - a_2 (b_1 c_3 - b_3 c_1) + a_3 (b_1 c_2 - b_2 c_1)]$$ प्राप्त होता है।

यह स्पष्ट है कि $\Delta_1 = -\Delta$

इसी प्रकार, हम किन्हीं दो स्तंभों को परस्पर परिवर्तित करके उक्त परिणाम को सत्यापित कर सकते हैं।

टिप्पणी हम पंक्तियों के परस्पर परिवर्तन को $R_i \leftrightarrow R_j$ और स्तंभों के परस्पर परिवर्तन को $C_i \leftrightarrow C_j$ के द्वारा निर्दिष्ट करते हैं।

उदाहरण 7 यदि $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 6 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & -7 \end{vmatrix}$ है तो गुणधर्म 2 का सत्यापन कीजिए।

हल हम ज्ञात कर चुके हैं कि $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 6 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & -7 \end{vmatrix} = -28$ (देखिए उदाहरण 6)

R_2 और R_3 को परस्पर परिवर्तित करने पर अर्थात् $R_2 \leftrightarrow R_3$ से

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 5 & -7 \\ 6 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$ प्राप्त होता है।

सारणिक Δ_1 को पहली पंक्ति के अनुदिश प्रसरण करने पर हम प्राप्त करते हैं कि

$$\Delta_1 = 2\begin{vmatrix} 5 & -7 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} - (-3)\begin{vmatrix} 1 & -7 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 2 (20 - 0) + 3 (4 + 42) + 5 (0 - 30)$$

$$= 40 + 138 - 150 = 28$$

स्पष्टतया $\Delta_1 = -\Delta$

अतः गुणधर्म 2 सत्यापित हुआ।

गुणधर्म 3 यदि एक सारणिक की कोई दो पंक्तियाँ (अथवा स्तंभ) समान हैं (सभी संगत अवयव समान हैं), तो सारणिक का मान शून्य होता है।

उपपत्ति यदि हम सारणिक Δ की समान पंक्तियों (या स्तंभों) को परस्पर परिवर्तित कर देते हैं तो Δ का मान परिवर्तित नहीं होता है।

तथापि, गुणधर्म 2 के अनुसार Δ का चिह्न बदल गया है।

इसलिए $\Delta = -\Delta$

या $\Delta = 0$

आइए हम उपरोक्त गुणधर्म का एक उदाहरण के द्वारा सत्यापन करते हैं।

उदाहरण 8 $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल पहली पंक्ति के अनुदिश प्रसरण करने पर हम प्राप्त करते हैं कि

$$\Delta = 3\,(6-6) - 2\,(6-9) + 3\,(4-6)$$
$$= 0 - 2\,(-3) + 3\,(-2) = 6 - 6 = 0$$

यहाँ R_2 और R_3 समान हैं।

गुणधर्म 4 यदि एक सारणिक के किसी एक पंक्ति (अथवा स्तंभ) के प्रत्येक अव्यव को एक अचर k, से गुणा करते हैं तो उसका मान भी k से गुणित हो जाता है।

सत्यापन मान लीजिए $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

इसकी प्रथम पंक्ति के अवयवों को k से गुणा करने पर प्राप्त सारणिक Δ_1 है तो

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} k\,a_1 & k\,b_1 & k\,c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

प्रथम पंक्ति के अनुदिश प्रसरण करने पर, हम प्राप्त करते हैं कि

$$\Delta_1 = k\,a_1\,(b_2\,c_3 - b_3\,c_2) - k\,b_1\,(a_2\,c_3 - c_2\,a_3) + k\,c_1\,(a_2\,b_3 - b_2\,a_3)$$
$$= k\,[a_1\,(b_2\,c_3 - b_3\,c_2) - b_1\,(a_2\,c_3 - c_2\,a_3) + c_1\,(a_2\,b_3 - b_2\,a_3)] = k\,\Delta$$

अत: $\begin{vmatrix} k\,a_1 & k\,b_1 & k\,c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

© NCERT not to be republished

टिप्पणी

(i) इस गुणधर्म के अनुसार, हम एक सारणिक की किसी एक पंक्ति या स्तभों से सार्व उभयनिष्ठ गुणनखंड बाहर निकाल सकते हैं।

(ii) यदि एक सारणिक की किन्हीं दो पंक्तियों (या स्तंभों) के संगत अवयव समानुपाती (उसी अनुपात में) है, तब उसका मान शून्य होता है। उदाहरणत:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ k\,a_1 & k\,a_2 & k\,a_3 \end{vmatrix} = 0 \text{ (पंक्तियाँ } R_2 \text{ व } R_3 \text{ समानुपाती है)}$$

उदाहरण 9 सारणिक $\begin{vmatrix} 102 & 18 & 36 \\ 1 & 3 & 4 \\ 17 & 3 & 6 \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए

हल ध्यान दीजिए कि $\begin{vmatrix} 102 & 18 & 36 \\ 1 & 3 & 4 \\ 17 & 3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6(17) & 6(3) & 6(6) \\ 1 & 3 & 4 \\ 17 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 17 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & 4 \\ 17 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 0$

(गुणधर्म 3 और 4)

गुणधर्म 5 यदि एक सारणिक की एक पंक्ति या स्तंभ के कुछ या सभी अवयव दो (या अधिक) पदों के योगफल के रूप में व्यक्त हों तो सारणिक को दो (या अधिक) सारणिकों के योगफल के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

उदाहरणतया $\begin{vmatrix} a_1+\lambda_1 & a_2+\lambda_2 & a_3+\lambda_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

सत्यापन बाँया पक्ष $= \begin{vmatrix} a_1+\lambda_1 & a_2+\lambda_2 & a_3+\lambda_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

प्रथम पंक्ति के अनुदिश प्रसरण करने पर हम पाते हैं कि

$$\Delta = (a_1+\lambda_1)(b_2 c_3 - c_2 b_3) - (a_2+\lambda_2)(b_1 c_3 - b_3 c_1) + (a_3+\lambda_3)(b_1 c_2 - b_2 c_1)$$

© NCERT not to be republished

$$= a_1 (b_2 c_3 - c_2 b_3) - a_2 (b_1 c_3 - b_3 c_1) + a_3 (b_1 c_2 - b_2 c_1)$$
$$+ \lambda_1 (b_2 c_3 - c_2 b_3) - \lambda_2 (b_1 c_3 - b_3 c_1) + \lambda_3 (b_1 c_2 - b_2 c_1)$$

(पदों को व्यवस्थित करने पर)

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \text{दाँया पक्ष}$$

इसी प्रकार दूसरी पंक्तियों व स्तंभों के लिए हम गुणधर्म 5 का सत्यापन कर सकते हैं।

उदाहरण 10 दर्शाइए कि $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a+2x & b+2y & c+2z \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0$

हल हम जानते हैं कि $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a+2x & b+2y & c+2z \\ x & y & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2x & 2y & 2z \\ x & y & z \end{vmatrix}$

(गुणधर्म 5 के द्वारा)

$= 0 + 0 = 0$ (गुणधर्म 3 और 4 का प्रयोग करने पर)

गुणधर्म 6 यदि एक सारणिक के किसी पंक्ति या स्तंभ के प्रत्येक अवयव में, दूसरी पंक्ति या स्तंभ के संगत अवयवों के समान गुणजों को जोड़ दिया जाता है तो सारणिक का मान वही रहता है। अर्थात्, यदि हम $R_i \to R_i + kR_j$ या $C_i \to C_i + k C_j$ का प्रयोग करें तो सारणिक का मान वही रहता है।

सत्यापन

मान लीजिए $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$ और $\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_1 + k c_1 & a_2 + k c_2 & a_3 + k c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$,

जहाँ Δ_1 संक्रिया $R_1 \to R_1 + kR_3$ के प्रयोग द्वारा प्राप्त होता है

यहाँ हम तीसरी पंक्ति (R_3) के अवयवों को अचर k से गुणा करके और उन्हें पहली पंक्ति (R_1) के संगत अवयवों में जोड़ते हैं।

संकेतन द्वारा इस संक्रिया को इस प्रकार लिखते हैं कि $R_1 \to R_1 + k R_3$

अब पुनः

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} kc_1 & kc_2 & kc_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \text{ (गुणधर्म 5 के द्वारा)}$$

$$= \Delta + 0 \quad \text{(जब कि } R_1 \text{ और } R_3 \text{ समानुपाती हैं)}$$

अतः $\Delta = \Delta_1$

टिप्पणी

(i) यदि सारणिक Δ में $R_i \to kR_i$ या $C_i \to kC_i$ के प्रयोग से प्राप्त सारणिक Δ_1 है, तो $\Delta_1 = k\Delta$.

(ii) यदि एक साथ $R_i \to R_i + kR_j$ जैसी संक्रियाओं का एक से अधिक बार प्रयोग किया गया हो तो ध्यान देना चाहिए कि पहली संक्रिया से प्रभावित पंक्ति का अन्य संक्रिया में प्रयोग नहीं होना चाहिए। ठीक इसी प्रकार की टिप्पणी स्तंभों की संक्रियाओं में प्रयोग की जाती है।

उदाहरण 11 सिद्ध कीजिए कि $\Delta = \begin{vmatrix} a & a+b & a+b+c \\ 2a & 3a+2b & 4a+3b+2c \\ 3a & 6a+3b & 10a+6b+3c \end{vmatrix} = a^3$

हल सारणिक Δ में $R_2 \to R_2 - 2R_1$ और $R_3 \to R_3 - 3R_1$ का प्रयोग करने पर हम पाते हैं कि

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & a+b & a+b+c \\ 0 & a & 2a+b \\ 0 & 3a & 7a+3b \end{vmatrix}$$

पुनः $R_3 \to R_3 - 3R_2$, का प्रयोग करने से हम पाते हैं कि

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & a+b & a+b+c \\ 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix}$$

C_1 के अनुदिश प्रसरण करने पर

$$\Delta = a\begin{vmatrix} a & 2a+b \\ 0 & a \end{vmatrix} + 0 + 0$$

$= a\,(a^2 - 0) = a\,(a^2) = a^3$ प्राप्त होता है।

उदाहरण 12 प्रसरण किए बिना सिद्ध कीजिए कि

$$\Delta = \begin{vmatrix} x+y & y+z & z+x \\ z & x & y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

हल Δ में $R_1 \to R_1 + R_2$ का प्रयोग करने पर हम पाते हैं

$$\Delta = \begin{vmatrix} x+y+z & x+y+z & x+y+z \\ z & x & y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

अब R_1 और R_3 के अवयव समानुपाती हैं।

इसलिए $\Delta = 0$

उदाहरण 13 निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix}$$

हल $R_2 \to R_2 - R_1$ और $R_3 \to R_3 - R_1$, का प्रयोग करने पर हम पाते हैं कि

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 0 & b-a & c(a-b) \\ 0 & c-a & b(a-c) \end{vmatrix}$$

R_2 और R_3 से क्रमशः $(b-a)$ और $(c-a)$ उभयनिष्ठ लेने पर हम पाते हैं कि

$$\Delta = (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 0 & 1 & -c \\ 0 & 1 & -b \end{vmatrix}$$

$= (b-a)(c-a)[(-b+c)]$ (पहले स्तंभ के अनुदिश प्रसरण करने पर)

$= (a-b)(b-c)(c-a)$

© NCERT not to be republished

उदाहरण 14 सिद्ध कीजिए कि $\begin{vmatrix} b+c & a & a \\ b & c+a & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix} = 4abc$

हल मान लीजिए

$$\Delta = \begin{vmatrix} b+c & a & a \\ b & c+a & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix}$$

सारणिक पर $R_1 \to R_1 - R_2 - R_3$ का प्रयोग करने पर हम पाते हैं कि

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -2c & -2b \\ b & c+a & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix}$$

R_1 के अनुदिश प्रसरण करने पर हम पाते हैं कि

$$\Delta = 0\begin{vmatrix} c+a & b \\ c & a+b \end{vmatrix} - (-2c)\begin{vmatrix} b & b \\ c & a+b \end{vmatrix} + (-2b)\begin{vmatrix} b & c+a \\ c & c \end{vmatrix}$$

$$= 2\,c\,(a\,b + b^2 - bc) - 2\,b\,(b\,c - c^2 - ac)$$

$$= 2\,a\,b\,c + 2\,cb^2 - 2\,bc^2 - 2\,b^2c + 2\,bc^2 + 2\,abc$$

$$= 4\,abc$$

उदाहरण 15 यदि x, y, z विभिन्न हों और $\Delta = \begin{vmatrix} x & x^2 & 1+x^3 \\ y & y^2 & 1+y^3 \\ z & z^2 & 1+z^3 \end{vmatrix} = 0$,

तो दर्शाइए कि $1 + xyz = 0$

हल हमें ज्ञात है $\Delta = \begin{vmatrix} x & x^2 & 1+x^3 \\ y & y^2 & 1+y^3 \\ z & z^2 & 1+z^3 \end{vmatrix}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} x & x^2 & 1 \\ y & y^2 & 1 \\ z & z^2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ y & y^2 & y^3 \\ z & z^2 & z^3 \end{vmatrix} \text{ (गुणधर्म 5 के प्रयोग द्वारा)}$$

© NCERT not to be republished

$$= (-1)^2\begin{vmatrix}1 & x & x^2\\1 & y & y^2\\1 & z & z^2\end{vmatrix} + xyz\begin{vmatrix}1 & x & x^2\\1 & y & y^2\\1 & z & z^2\end{vmatrix}$$ ($C_3 \leftrightarrow C_2$ और तब $C_1 \leftrightarrow C_2$ के प्रयोग द्वारा)

$$= \begin{vmatrix}1 & x & x^2\\1 & y & y^2\\1 & z & z^2\end{vmatrix}(1+xyz)$$

$$= (1+xyz)\begin{vmatrix}1 & x & x^2\\0 & y-x & y^2-x^2\\0 & z-x & z^2-x^2\end{vmatrix}$$ ($R_2 \to R_2 - R_1$ और $R_3 \to R_3 - R_1$ का प्रयोग करने पर)

R_2 से $(y-x)$ और R_3 से $(z-x)$ उभयनिष्ठ लेने पर हम प्राप्त करते हैं कि

$$\Delta = (1+xyz)\,(y-x)\,(z-x)\begin{vmatrix}1 & x & x^2\\0 & 1 & y+x\\0 & 1 & z+x\end{vmatrix}$$

$= (1+xyz)\,(y-x)\,(z-x)\,(z-y)$ (C_1 के अनुदिश प्रसरण करने पर)

चूँकि $\Delta = 0$ और x, y और z सभी भिन्न हैं,

अतः $x - y \neq 0, y - z \neq 0, z - x \neq 0$, से हमें $1 + xyz = 0$ प्राप्त होता है।

उदाहरण 16 दर्शाइए कि $\begin{vmatrix}1+a & 1 & 1\\1 & 1+b & 1\\1 & 1 & 1+c\end{vmatrix} = abc\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) = abc+bc+ca+ab$

हल R_1, R_2 और R_3 में से क्रमशः a, b और c उभयनिष्ठ लेने पर हम प्राप्त करते हैं कि

$$\text{बाँया पक्ष} = abc\begin{vmatrix}\frac{1}{a}+1 & \frac{1}{a} & \frac{1}{a}\\\frac{1}{b} & \frac{1}{b}+1 & \frac{1}{b}\\\frac{1}{c} & \frac{1}{c} & \frac{1}{c}+1\end{vmatrix}$$

$R_1 \to R_1 + R_2 + R_3$ का प्रयोग करने पर हम पाते हैं कि

$$\Delta = abc\begin{vmatrix} 1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} & 1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} & 1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \\ \frac{1}{b} & \frac{1}{b}+1 & \frac{1}{b} \\ \frac{1}{c} & \frac{1}{c} & \frac{1}{c}+1 \end{vmatrix}$$

या $$\Delta = abc\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{b} & \frac{1}{b}+1 & \frac{1}{b} \\ \frac{1}{c} & \frac{1}{c} & \frac{1}{c}+1 \end{vmatrix}$$

अब $C_2 \to C_2 - C_1$ और $C_3 \to C_3 - C_1$ का प्रयोग करने पर हम पाते हैं कि

$$\Delta = abc\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{b} & 1 & 0 \\ \frac{1}{c} & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= abc\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\left[1(1-0)\right]$$

$$= abc\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) = abc + bc + ca + ab = \text{दाँया पक्ष}$$

टिप्पणी अन्य विधि द्वारा $C_1 \to C_1 - C_2$ व $C_3 \to C_3 - C_2$, का अनुप्रयोग करके तथा $C_1 \to C_1 - a\,C_3$ का प्रयोग करके उपरोक्त उदाहरण को हल करने का प्रयत्न करें।

प्रश्नावली 4.2

बिना प्रसरण किए और सारणिकों के गुणधर्मो का प्रयोग करके निम्नलिखित प्रश्न 1 से 5 को सिद्ध कीजिए।

1. $\begin{vmatrix} x & a & x+a \\ y & b & y+b \\ z & c & z+c \end{vmatrix} = 0$ **2.** $\begin{vmatrix} a-b & b-c & c-a \\ b-c & c-a & a-b \\ c-a & a-b & b-c \end{vmatrix} = 0$ **3.** $\begin{vmatrix} 2 & 7 & 65 \\ 3 & 8 & 75 \\ 5 & 9 & 86 \end{vmatrix} = 0$

4. $\begin{vmatrix} 1 & bc & a(b+c) \\ 1 & ca & b(c+a) \\ 1 & ab & c(a+b) \end{vmatrix} = 0$

5. $\begin{vmatrix} b+c & q+r & y+z \\ c+a & r+p & z+x \\ a+b & p+q & x+y \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & p & x \\ b & q & y \\ c & r & z \end{vmatrix}$

सारणिकों के गुणधर्मों का प्रयोग करके प्रश्न 6 से 14 तक को सिद्ध कीजिए:

6. $\begin{vmatrix} 0 & a & -b \\ -a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{vmatrix} = 0$

7. $\begin{vmatrix} -a^2 & ab & ac \\ ba & -b^2 & bc \\ ca & cb & -c^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2$

8. (i) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$

(ii) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$

9. $\begin{vmatrix} x & x^2 & yz \\ y & y^2 & zx \\ z & z^2 & xy \end{vmatrix} = (x-y)(y-z)(z-x)(xy+yz+zx)$

10. (i) $\begin{vmatrix} x+4 & 2x & 2x \\ 2x & x+4 & 2x \\ 2x & 2x & x+4 \end{vmatrix} = (5x+4)(4-x)^2$

(ii) $\begin{vmatrix} y+k & y & y \\ y & y+k & y \\ y & y & y+k \end{vmatrix} = k^2(3y+k)$

11. (i) $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$

© NCERT not to be republished

(ii) $\begin{vmatrix} x+y+2z & x & y \\ z & y+z+2x & y \\ z & x & z+x+2y \end{vmatrix} = 2(x+y+z)^3$

12. $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ x^2 & 1 & x \\ x & x^2 & 1 \end{vmatrix} = (1-x^3)^2$

13. $\begin{vmatrix} 1+a^2-b^2 & 2ab & -2b \\ 2ab & 1-a^2+b^2 & 2a \\ 2b & -2a & 1-a^2-b^2 \end{vmatrix} = (1+a^2+b^2)^3$

14. $\begin{vmatrix} a^2+1 & ab & ac \\ ab & b^2+1 & bc \\ ca & cb & c^2+1 \end{vmatrix} = 1+a^2+b^2+c^2$

प्रश्न संख्या 15 तथा 16 में सही उत्तर चुनिए।

15. यदि A एक 3×3 कोटि का वर्ग आव्यूह है तो $|kA|$ का मान होगा:

(A) $k\,|A|$ (B) $k^2\,|A|$ (C) $k^3\,|A|$ (D) $3k\,|A|$

16. निम्नलिखित में से कौन सा कथन सही है।

(A) सारणिक एक वर्ग आव्यूह है।

(B) सारणिक एक आव्यूह से संबद्ध एक संख्या है।

(C) सारणिक एक वर्ग आव्यूह से संबद्ध एक संख्या है।

(D) इनमें से कोई नहीं।

4.4 त्रिभुज का क्षेत्रफल (Area of a Triangle)

हमने पिछली कक्षाओं में सीखा है कि एक त्रिभुज जिसके शीर्षबिंदु (x_1, y_1), (x_2, y_2) तथा (x_3, y_3), हों तो उसका क्षेत्रफल व्यंजक $\frac{1}{2}[x_1(y_2-y_3) + x_2(y_3-y_1) + x_3(y_1-y_2)]$ द्वारा व्यक्त किया जाता है। अब इस व्यंजक को सारणिक के रूप में इस प्रकार लिखा जा सकता है:

$$\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \quad \ldots (1)$$

टिप्पणी

(i) क्योंकि क्षेत्रफल एक धनात्मक राशि होती है इसलिए हम सदैव (1) में सारणिक का निरपेक्ष मान लेते हैं।

(ii) यदि क्षेत्रफल दिया हो तो गणना के लिए सारणिक का धनात्मक और ऋणात्मक दोनों मानों का प्रयोग कीजिए।

(iii) तीन संरेख बिंदुओं से बने त्रिभुज का क्षेत्रफल शून्य होगा।

उदाहरण 17 एक त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष (3, 8), (– 4, 2) और (5, 1) हैं।

हल त्रिभुज का क्षेत्रफल:

$$\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 3 & 8 & 1 \\ -4 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left[3(2-1)-8(-4-5)+1(-4-10)\right]$$

$$= \frac{1}{2}(3+72-14) = \frac{61}{2}$$

उदाहरण 18 सारणिकों का प्रयोग करके A(1, 3) और B (0, 0) को जोड़ने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए और k का मान ज्ञात कीजिए यदि एक बिंदु D(k, 0) इस प्रकार है कि Δ ABD का क्षेत्रफल 3 वर्ग इकाई है।

हल मान लीजिए AB पर कोई बिंदु P (x, y) है तब Δ ABP का क्षेत्रफल = 0 (क्यों?)

इसलिए
$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$$

इससे प्राप्त है
$$\frac{1}{2}(y-3x) = 0 \text{ या } y = 3x$$

जो अभीष्ट रेखा AB का समीकरण है।

किंतु Δ ABD का क्षेत्रफल 3 वर्ग इकाई दिया है अतः

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ k & 0 & 1 \end{vmatrix} = \pm 3 \text{ हमें प्राप्त है } \frac{-3k}{2} = \pm 3, \text{ i.e., } k = \mp 2$$

प्रश्नावली 4.3

1. निम्नलिखित प्रत्येक में दिए गए शीर्ष बिंदुओं वाले त्रिभुजों का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

   (i) (1, 0), (6, 0), (4, 3) (ii) (2, 7), (1, 1), (10, 8)

   (iii) (–2, –3), (3, 2), (–1, –8)

2. दर्शाइए कि बिंदु A $(a, b + c)$, B $(b, c + a)$ और C $(c, a + b)$ संरेख हैं।

3. प्रत्येक में k का मान ज्ञात कीजिए यदि त्रिभुजों का क्षेत्रफल 4 वर्ग इकाई है जहाँ शीर्षबिंदु निम्नलिखित हैं:

   (i) $(k, 0), (4, 0), (0, 2)$ (ii) $(–2, 0), (0, 4), (0, k)$

4. (i) सारणिकों का प्रयोग करके (1, 2) और (3, 6) को मिलाने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

   (ii) सारणिकों का प्रयोग करके (3, 1) और (9, 3) को मिलाने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

5. यदि शीर्ष (2, –6), (5, 4) और $(k, 4)$ वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल 35 वर्ग इकाई हो तो k का मान है:

   (A) 12 (B) –2 (C) –12, –2 (D) 12, –2

4.5 उपसारणिक और सहखंड (Minor and Co-factor)

इस अनुच्छेद में हम उपसारणिकों और सहखंडों का प्रयोग करके सारणिको के प्रसरण का विस्तृत रूप लिखना सीखेंगे।

परिभाषा 1 सारणिक के अवयव a_{ij} का उपसारणिक एक सारणिक है जो i वी पंक्ति और j वाँ स्तंभ जिसमें अवयव a_{ij} स्थित है, को हटाने से प्राप्त होता है। अवयव a_{ij} के उपसारणिक को M_{ij} के द्वारा व्यक्त करते हैं।

टिप्पणी $n(n \geq 2)$ क्रम के सारणिक के अवयव का उपसारणिक $n – 1$ क्रम का सारणिक होता है।

उदाहरण 19 सारणिक $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ में अवयव 6 का उपसारणिक ज्ञात कीजिए।

हल क्योंकि 6 दूसरी पंक्ति एवं तृतीय स्तंभ में स्थित है। इसलिए इसका उपसारणिक $= M_{23}$ निम्नलिखित प्रकार से प्राप्त होता है।

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 8 – 14 = – 6 \text{ (}\Delta \text{ से } R_2 \text{ और } C_3 \text{ हटाने पर)}$$

परिभाषा 2 एक अवयव a_{ij} का सहखंड जिसे A_{ij} द्वारा व्यक्त करते हैं, जहाँ

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij},$$

के द्वारा परिभाषित करते हैं जहाँ a_{ij} का उपसारणिक M_{ij} है।

उदाहरण 20 सारणिक $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$ के सभी अवयवों के उपसारणिक व सहखंड ज्ञात कीजिए।

हल अवयव a_{ij} का उपसारणिक M_{ij} है।

यहाँ $a_{11} = 1$, इसलिए $M_{11} = a_{11}$ का उपसारणिक $= 3$

$M_{12} =$ अवयव a_{12} का उपसारणिक $= 4$

$M_{21} =$ अवयव a_{21} का उपसारणिक $= -2$

$M_{22} =$ अवयव a_{22} का उपसारणिक $= 1$

अब a_{ij} का सहखंड A_{ij} है। इसलिए

$$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = (-1)^2 (3) = 3$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = (-1)^3 (4) = -4$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = (-1)^3 (-2) = 2$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = (-1)^4 (1) = 1$$

उदाहरण 21 $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ के अवयवों a_{11} तथा a_{21} के उपसारणिक और सहखंड ज्ञात कीजिए।

हल उपसारणिक और सहखंड की परिभाषा द्वारा हम पाते हैं:

a_{11} का उपसारणिक $= M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22} a_{33} - a_{23} a_{32}$

a_{11} का सहखंड $= A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = a_{22} a_{33} - a_{23} a_{32}$

a_{21} का उपसारणिक $= M_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12} a_{33} - a_{13} a_{32}$

a_{21} का सहखंड $= A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = (-1) (a_{12} a_{33} - a_{13} a_{32}) = - a_{12} a_{33} + a_{13} a_{32}$

© NCERT not to be republished

टिप्पणी उदाहरण 21 में सारणिक Δ का R_1 के सापेक्ष प्रसरण करने पर हम पाते हैं कि

$$\Delta = (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$= a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + a_{13} A_{13}$, जहाँ a_{ij} का सहखंड A_{ij} हैं।

$= R_1$ के अवयवों और उनके संगत सहखंडों के गुणनफल का योग।

इसी प्रकार Δ का R_2, R_3, C_1, C_2 और C_3 के अनुदिश 5 प्रसरण अन्य प्रकार से हैं।

अतः सारणिक Δ, किसी पंक्ति (या स्तंभ) के अवयवों और उनके संगत सहखंडों के गुणनफल का योग है।

टिप्पणी यदि एक पंक्ति (या स्तंभ) के अवयवों को अन्य पंक्ति (या स्तंभ) के सहखंडों से गुणा किया जाए तो उनका योग शून्य होता है। उदाहरणतया, माना $\Delta = a_{11} A_{21} + a_{12} A_{22} + a_{13} A_{23}$ तब:

$$\Delta = a_{11} (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0 \text{ (क्योंकि } R_1 \text{ और } R_2 \text{ समान हैं)}$$

इसी प्रकार हम अन्य पंक्तियों और स्तंभों के लिए प्रयत्न कर सकते हैं।

उदाहरण 22 सारणिक $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 6 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & -7 \end{vmatrix}$ के अवयवों के उपसारणिक और सहखंड ज्ञात कीजिए और सत्यापित कीजिए कि $a_{11} A_{31} + a_{12} A_{32} + a_{13} A_{33} = 0$ है।

हल यहाँ $M_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} = 0 - 20 = -20$; इसलिए $A_{11} = (-1)^{1+1} (-20) = -20$

$M_{12} = \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 1 & -7 \end{vmatrix} = -42 - 4 = -46$; इसलिए $A_{12} = (-1)^{1+2} (-46) = 46$

$M_{13} = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 30 - 0 = 30$; इसलिए $A_{13} = (-1)^{1+3} (30) = 30$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} = 21 - 25 = -4; \text{ इसलिए } A_{21} = (-1)^{2+1}(-4) = 4$$

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -7 \end{vmatrix} = -14 - 5 = -19; \text{ इसलिए } A_{22} = (-1)^{2+2}(-19) = -19$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 10 + 3 = 13; \text{ इसलिए } A_{23} = (-1)^{2+3}(13) = -13$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -12 - 0 = -12; \text{ इसलिए } A_{31} = (-1)^{3+1}(-12) = -12$$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 30 = -22; \text{ इसलिए } A_{32} = (-1)^{3+2}(-22) = 22$$

और $$M_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 18 = 18; \text{ इसलिए } A_{33} = (-1)^{3+3}(18) = 18$$

अब $a_{11} = 2, a_{12} = -3, a_{13} = 5;$ तथा $A_{31} = -12, A_{32} = 22, A_{33} = 18$ है।

इसलिए $a_{11}A_{31} + a_{12}A_{32} + a_{13}A_{33}$

$= 2(-12) + (-3)(22) + 5(18) = -24 - 66 + 90 = 0$

प्रश्नावली 4.4

निम्नलिखित सारणिकों के अवयवों के उपसारणिक एवं सहखंड लिखिए।

1. (i) $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$ (ii) $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$

2. (i) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ (ii) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

3. दूसरी पंक्ति के अवयवों के सहखंडों का प्रयोग करके $\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 8 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए।

© NCERT not to be republished

4. तीसरे स्तंभ के अवयवों के सहखंडों का प्रयोग करके $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x & yz \\ 1 & y & zx \\ 1 & z & xy \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए।

5. यदि $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ और a_{ij} का सहखंड A_{ij} हो तो Δ का मान निम्नलिखित रूप में व्यक्त किया जाता है:

(A) $a_{11} A_{31} + a_{12} A_{32} + a_{13} A_{33}$ (B) $a_{11} A_{11} + a_{12} A_{21} + a_{13} A_{31}$

(C) $a_{21} A_{11} + a_{22} A_{12} + a_{23} A_{13}$ (D) $a_{11} A_{11} + a_{21} A_{21} + a_{31} A_{31}$

4.6 आव्यूह के सहखंडज और व्युत्क्रम (Adjoint and Inverse of a Matrix)

पिछले अध्याय में हमने एक आव्यूह के व्युत्क्रम का अध्ययन किया है। इस अनुच्छेद में हम एक आव्यूह के व्युत्क्रम के अस्तित्व के लिए शर्तों की भी व्याख्या करेंगे।

A^{-1} ज्ञात करने के लिए पहले हम एक आव्यूह का सहखंडज परिभाषित करेंगे।

4.6.1 *आव्यूह का सहखंडज (Adjoint of a matrix)*

परिभाषा 3 एक वर्ग आव्यूह $A = [a_{ij}]$ का सहखंडज, आव्यूह $[A_{ij}]$ के परिवर्त के रूप में परिभाषित है, जहाँ A_{ij}, अवयव a_{ij} का सहखंड है। आव्यूह A के सहखंडज को *adj* A के द्वारा व्यक्त करते हैं।

मान लीजिए $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ है।

तब $adj\ A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$ का परिवर्त $= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$ होता है।

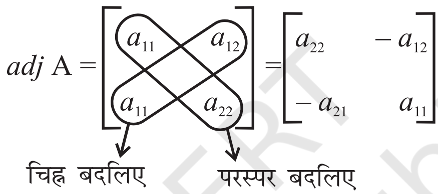
उदाहरण 23 आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ का सहखंडज ज्ञात कीजिए।

© NCERT not to be republished

हल हम जानते हैं कि $A_{11} = 4, A_{12} = -1, A_{21} = -3, A_{22} = 2$

अत: $$adj\ A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

टिप्पणी 2×2 कोटि के वर्ग आव्यूह $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ का सहखंडज $adj\ A$, a_{11} और a_{22} को परस्पर बदलने एवं a_{12} और a_{21} के चिह्न परिवर्तित कर देने से भी प्राप्त किया जा सकता है जैसा नीचे दर्शाया गया है।



हम बिना उपपत्ति के निम्नलिखित प्रमेय निर्दिष्ट करते हैं।

प्रमेय 1 यदि A कोई n कोटि का आव्यूह है तो, $A(adj\ A) = (adj\ A)\ A = |A|I$, जहाँ I, n कोटि का तत्समक आव्यूह है।

सत्यापन: मान लीजिए

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \text{ है तब } adj\ A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$$

क्योंकि एक पंक्ति या स्तंभ के अवयवों का संगत सहखंडों की गुणा का योग $|A|$ के समान होता है अन्यथा शून्य होता है।

इस प्रकार $$A\ (adj\ A) = \begin{bmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{bmatrix} = |A| \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = |A|\ I$$

इसी प्रकार, हम दर्शा सकते हैं कि $(adj\ A)\ A = |A|\ I$

अत: $A\ (adj\ A) = (adj\ A)\ A = |A|\ I$ सत्यापित है।

© NCERT not to be republished

परिभाषा 4 एक वर्ग आव्यूह A अव्युत्क्रमणीय (singular) कहलाता है यदि $|A| = 0$ है।

उदाहरण के लिए आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$ का सारणिक शून्य है। अत: A अव्युत्क्रमणीय है।

परिभाषा 5 एक वर्ग आव्यूह A व्युत्क्रमणीय (non-singular) कहलाता है यदि $|A| \neq 0$

मान लीजिए $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ हो तो $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2 \neq 0$ है।

अत: A व्युत्क्रमणीय है।

हम निम्नलिखित प्रमेय बिना उपपत्ति के निर्दिष्ट कर रहे हैं।

प्रमेय 2 यदि A तथा B दोनों एक ही कोटि के व्युत्क्रमणीय आव्यूह हों तो AB तथा BA भी उसी कोटि के व्युत्क्रमणीय आव्यूह होते हैं।

प्रमेय 3 आव्यूहों के गुणनफल का सारणिक उनके क्रमश: सारणिकों के गुणनफल के समान होता है अर्थात् $|AB| = |A|\ |B|$, जहाँ A तथा B समान कोटि के वर्ग आव्यूह हैं।

टिप्पणी हम जानते हैं कि $(adj\ A)\ A = |A|\ I = \begin{bmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{bmatrix}$

दोनों ओर आव्यूहों का सारणिक लेने पर,

$$|(adj\ A)\ A| = \begin{vmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{vmatrix}$$

अर्थात् $$|(adj\ A)|\ |A| = |A|^3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$ (क्यों?)

अर्थात् $$|(adj\ A)|\ |A| = |A|^3 \quad (1)$$

अर्थात् $$|(adj\ A)| = |A|^2$$

व्यापक रुप से, यदि n कोटि का एक वर्ग आव्यूह A हो तो $|adj\, A| = |A|^{n-1}$ होगा।

प्रमेय 4 एक वर्ग आव्यूह A के व्युत्क्रम का अस्तित्व है, यदि और केवल यदि A व्युत्क्रमणीय आव्यूह है।

उपपत्ति मान लीजिए n कोटि का व्युत्क्रमणीय आव्यूह A है और n कोटि का तत्समक आव्यूह I है। तब n कोटि के एक वर्ग आव्यूह B का अस्तित्व इस प्रकार हो ताकि $AB = BA = I$

अब $AB = I$ है तो $|AB| = |I|$ या $|A||B| = 1$ (क्योंकि $|I| = 1, |AB| = |A||B|$)

इससे प्राप्त होता है $|A| \neq 0$. अतः A व्युत्क्रमणीय है।

विलोमतः मान लीजिए A व्युत्क्रमणीय है। तब $|A| \neq 0$

अब $$A\,(adj\ A) = (adj\ A)\,A = |A|\,I \qquad \text{(प्रमेय 1)}$$

या $$A\left(\frac{1}{|A|}adj\ A\right) = \left(\frac{1}{|A|}adj\ A\right)A = I$$

या $$AB = BA = I, \text{ जहाँ } B = \frac{1}{|A|}adj\ A$$

अतः A के व्युत्क्रम का अस्तित्व है और $A^{-1} = \frac{1}{|A|}adj\ A$

उदाहरण 24 यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ हो तो सत्यापित कीजिए कि $A.\ adj\ A = |A|.\ I$ और A^{-1} ज्ञात कीजिए।

हल हम पाते हैं कि $|A| = 1\,(16 - 9) - 3\,(4 - 3) + 3\,(3 - 4) = 1 \neq 0$

अब $A_{11} = 7,\ A_{12} = -1, A_{13} = -1, A_{21} = -3, A_{22} = 1, A_{23} = 0, A_{31} = -3, A_{32} = 0, A_{33} = 1$

इसलिए $$adj\ A = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

अब $$A.(adj\ A) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7-3-3 & -3+3+0 & -3+0+3 \\ 7-4-3 & -3+4+0 & -3+0+3 \\ 7-3-4 & -3+3+0 & -3+0+4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (1) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = |A| . I$$

और $$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot adj\, A = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

उदाहरण 25 यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, तो सत्यापित कीजिए कि $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ है।

हल हम जानते हैं कि $AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 5 & -14 \end{bmatrix}$

क्योंकि $|AB| = -11 \neq 0$, $(AB)^{-1}$ का अस्तित्व है और इसे निम्नलिखित प्रकार से व्यक्त किया जाता है।

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{|AB|}.adj\,(AB) = -\frac{1}{11}\begin{bmatrix} -14 & -5 \\ -5 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 14 & 5 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

और $|A| = -11 \neq 0$ व $|B| = 1 \neq 0$. इसलिए A^{-1} और B^{-1} दोनों का अस्तित्व है और जिसे निम्नलिखित रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

$$A^{-1} = -\frac{1}{11}\begin{bmatrix} -4 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

इसलिए $$B^{-1}A^{-1} = -\frac{1}{11}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{11}\begin{bmatrix} -14 & -5 \\ -5 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 14 & 5 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

अतः $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$ है।

© NCERT not to be republished

उदाहरण 26 प्रदर्शित कीजिए कि आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ समीकरण $A^2 - 4A + I = O$, जहाँ I 2×2 कोटि का एक तत्समक आव्यूह है और O, 2×2 कोटि का एक शून्य आव्यूह है। इसकी सहायता से A^{-1} ज्ञात कीजिए।

हल हम जानते हैं कि $A^2 = A.A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 12 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$

अतः $\quad A^2 - 4A + I = \begin{bmatrix} 7 & 12 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 & 12 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O$

अब $\quad A^2 - 4A + I = O$

इसलिए $\quad A\,A - 4A = -I$

या $\quad A\,A(A^{-1}) - 4\,A\,A^{-1} = -I\,A^{-1}$ (दोनों ओर A^{-1} से उत्तर गुणन द्वारा क्योंकि $|A| \neq 0$)

या $\quad A\,(A\,A^{-1}) - 4I = -A^{-1}$

या $\quad AI - 4I = -A^{-1}$

या $\quad A^{-1} = 4I - A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

अतः $\quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

प्रश्नावली 4.5

प्रश्न 1 और 2 में प्रत्येक आव्यूह का सहखंडज (adjoint) ज्ञात कीजिए

1. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ **2.** $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

प्रश्न 3 और 4 में सत्यापित कीजिए कि $A\,(adj\,A) = (adj\,A)\,.A = |A|\,.\,I$ है।

3. $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -6 \end{bmatrix}$ **4.** $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

© NCERT not to be republished

प्रश्न 5 से 11 में दिए गए प्रत्येक आव्यूहों के व्युत्क्रम (जिनका अस्तित्व हो) ज्ञात कीजिए।

5. $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ **6.** $\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ **7.** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 5 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ **9.** $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 0 \\ -7 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ **10.** $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}$

11. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix}$

12. यदि $A = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ और $B = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$ है तो सत्यापित कीजिए कि $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$ है।

13. यदि $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ है तो दर्शाइए कि $A^2 - 5A + 7I = O$ है इसकी सहायता से A^{-1} ज्ञात कीजिए।

14. आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ के लिए a और b ऐसी संख्याएँ ज्ञात कीजिए ताकि $A^2 + aA + bI = O$ हो।

15. आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ के लिए दर्शाइए कि $A^3 - 6A^2 + 5A + 11\ I = O$ है।

इसकी सहायता से A^{-1} ज्ञात कीजिए।

16. यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, तो सत्यापित कीजिए कि $A^3 - 6A^2 + 9A - 4I = O$ है तथा

इसकी सहायता से A^{-1} ज्ञात कीजिए।

© NCERT not to be republished

17. यदि A, 3×3 कोटि का वर्ग आव्यूह है तो $|adj\ A|$ का मान है:

(A) $|A|$ (B) $|A|^2$ (C) $|A|^3$ (D) $3|A|$

18. यदि A कोटि दो का व्युत्क्रमीय आव्यूह है तो $\det(A^{-1})$ बराबर:

(A) $\det(A)$ (B) $\dfrac{1}{\det(A)}$ (C) 1 (D) 0

4.7 सारणिकों और आव्यूहों के अनुप्रयोग (Applications of Determinants and Matrices)

इस अनुच्छेद में हम दो या तीन अज्ञात राशियों के रैखिक समीकरण निकाय के हल और रैखिक समीकरणों के निकाय की संगतता की जाँच में सारणिकों और आव्यूहों के अनुप्रयोगों का वर्णन करेंगे।

संगत निकाय: निकाय संगत कहलाता है यदि इसके हलों (एक या अधिक) का अस्तित्व होता है।

असंगत निकाय: निकाय असंगत कहलाता है यदि इसके किसी भी हल का अस्तित्व नहीं होता है।

टिप्पणी इस अध्याय में हम अद्वितीय हल के समीकरण निकाय तक सीमित रहेंगे।

4.7.1 *आव्यूह के व्युत्क्रम द्वारा रैखिक समीकरणों के निकाय का हल (Solution of a system of linear equations using inverse of a matrix)*

आइए हम रैखिक समीकरणों के निकाय को आव्यूह समीकरण के रूप में व्यक्त करते हैं और आव्यूह के व्युत्क्रम का प्रयोग करके उसे हल करते हैं।

निम्नलिखित समीकरण निकाय पर विचार कीजिए

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1$$
$$a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2$$
$$a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3$$

मान लीजिए $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ और $B = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$

तब समीकरण निकाय AX = B के रूप में निम्नलिखित प्रकार से व्यक्त की जा सकती है।

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

स्थिति 1 यदि A एक व्युत्क्रमणीय आव्यूह है तब इसके व्युत्क्रम का अस्तित्व है। अतः AX = B से हम पाते हैं कि

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B \qquad (A^{-1} \text{ से पूर्व गुणन के द्वारा})$$

या $$(A^{-1}A)X = A^{-1}B \qquad (\text{साहचर्य गुणन द्वारा})$$

या $$IX = A^{-1}B$$

या $$X = A^{-1}B$$

यह आव्यूह समीकरण दिए गए समीकरण निकाय का अद्वितीय हल प्रदान करता है क्योंकि एक आव्यूह का व्युत्क्रम अद्वितीय होता है। समीकरणों के निकाय के हल करने की यह विधि आव्यूह विधि कहलाती है।

स्थिति 2 यदि A एक अव्युत्क्रमणीय आव्यूह है तब $|A| = 0$ होता है।

इस स्थिति में हम $(adj\, A)\, B$ ज्ञात करते हैं।

यदि $(adj\, A)\, B \neq O$, (O शून्य आव्यूह है), तब कोई हल नहीं होता है और समीकरण निकाय असंगत कहलाती है।

यदि $(adj\, A)\, B = O$, तब निकाय संगत या असंगत होगी क्योंकि निकाय के अनंत हल होंगे या कोई भी हल नहीं होगा।

उदाहरण 27 निम्नलिखित समीकरण निकाय को हल कीजिए:

$$2x + 5y = 1$$
$$3x + 2y = 7$$

हल समीकरण निकाय AX = B के रूप में लिखा जा सकता है, जहाँ

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ और } B = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix}$$

अब, $|A| = -11 \neq 0$, अतः A व्युत्क्रमणीय आव्यूह है इसलिए इसके व्युत्क्रम का अस्तित्व है। और इसका एक अद्वितीय हल है।

ध्यान दीजिए कि $$A^{-1} = -\frac{1}{11}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

इसलिए $$X = A^{-1}B = -\frac{1}{11}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix}$$

अर्थात् $$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -\frac{1}{11}\begin{bmatrix} -33 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

अतः $$x = 3,\ y = -1$$

उदाहरण 28 निम्नलिखित समीकरण निकाय

$$3x - 2y + 3z = 8$$
$$2x + y - z = 1$$
$$4x - 3y + 2z = 4$$

को आव्यूह विधि से हल कीजिए।

हल समीकरण निकाय को AX = B के रूप में व्यक्त किया जा सकता है जहाँ

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 2 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ और } B = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

हम देखते हैं कि

$$|A| = 3\,(2 - 3) + 2(4 + 4) + 3\,(-6 - 4) = -17 \neq 0 \text{ है।}$$

अतः A व्युत्क्रमणीय है, और इसके व्युत्क्रम का अस्तित्व है।

$$A_{11} = -1, \qquad A_{12} = -8, \qquad A_{13} = -10$$
$$A_{21} = -5, \qquad A_{22} = -6, \qquad A_{23} = 1$$
$$A_{31} = -1, \qquad A_{32} = 9, \qquad A_{33} = 7$$

इसलिए $$A^{-1} = -\frac{1}{17}\begin{bmatrix} -1 & -5 & -1 \\ -8 & -6 & 9 \\ -10 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

और $$X = A^{-1}B = -\frac{1}{17}\begin{bmatrix} -1 & -5 & -1 \\ -8 & -6 & 9 \\ -10 & 1 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

अतः $$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = -\frac{1}{17}\begin{bmatrix} -17 \\ -34 \\ -51 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

अतः $x = 1, y = 2$ व $z = 3$

उदाहरण 29 तीन संख्याओं का योग 6 है। यदि हम तीसरी संख्या को 3 से गुणा करके दूसरी संख्या में जोड़ दें तो हमें 11 प्राप्त होता है। पहली ओर तीसरी को जोड़ने से हमें दूसरी संख्या का दुगुना प्राप्त होता है। इसका बीजगणितीय निरूपण कीजिए और आव्यूह विधि से संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए पहली, दूसरी व तीसरी संख्या क्रमशः x, y और z, द्वारा निरूपित है। तब दी गई शर्तों के अनुसार हमें प्राप्त होता है:

$$x + y + z = 6$$

$$y + 3z = 11$$

$$x + z = 2y$$

या $$x - 2y + z = 0$$

इस निकाय को A X = B के रूप में लिखा जा सकता है जहाँ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ और } B = \begin{bmatrix} 6 \\ 11 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ है।}$$

यहाँ $|A| = 1(1+6) + 0 + 1(3-1) = 9 \neq 0$ है। अब हम adj A ज्ञात करते हैं।

$$A_{11} = 1\ (1 + 6) = 7, \quad A_{12} = -\ (0 - 3) = 3, \quad A_{13} = -1$$

$$A_{21} = -\ (1 + 2) = -3, \quad A_{22} = 0, \quad A_{23} = -\ (-2 - 1) = 3$$

$$A_{31} = (3 - 1) = 2, \quad A_{32} = -\ (3 - 0) = -3, \quad A_{33} = (1 - 0) = 1$$

अतः $$adj\ A = \begin{bmatrix} 7 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

इस प्रकार $$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\ adj.\ (A) = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 7 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

क्योंकि $$X = A^{-1} B$$

$$X = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 7 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 \\ 11 \\ 0 \end{bmatrix}$$

या $$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 42 - 33 + 0 \\ 18 + 0 + 0 \\ -6 + 33 + 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 9 \\ 18 \\ 27 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

अतः $$x = 1, y = 2, z = 3$$

प्रश्नावली 4.6

निम्नलिखित प्रश्नों 1 से 6 तक दी गई समीकरण निकायों का संगत अथवा असंगत के रूप में वर्गीकरण कीजिए

1. $x + 2y = 2$
$2x + 3y = 3$

2. $2x - y = 5$
$x + y = 4$

3. $x + 3y = 5$
$2x + 6y = 8$

4. $x + y + z = 1$
$2x + 3y + 2z = 2$
$ax + ay + 2az = 4$

5. $3x - y - 2z = 2$
$2y - z = -1$
$3x - 5y = 3$

6. $5x - y + 4z = 5$
$2x + 3y + 5z = 2$
$5x - 2y + 6z = -1$

निम्नलिखित प्रश्न 7 से 14 तक प्रत्येक समीकरण निकाय को आव्यूह विधि से हल कीजिए।

7. $5x + 2y = 4$
$7x + 3y = 5$

8. $2x - y = -2$
$3x + 4y = 3$

9. $4x - 3y = 3$
$3x - 5y = 7$

10. $5x + 2y = 3$
$3x + 2y = 5$

11. $2x + y + z = 1$
$x - 2y - z = \frac{3}{2}$
$3y - 5z = 9$

12. $x - y + z = 4$
$2x + y - 3z = 0$
$x + y + z = 2$

13. $2x + 3y + 3z = 5$
$x - 2y + z = -4$
$3x - y - 2z = 3$

14. $x - y + 2z = 7$
$3x + 4y - 5z = -5$
$2x - y + 3z = 12$

15. यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ है तो A^{-1} ज्ञात कीजिए। A^{-1} का प्रयोग करके निम्नलिखित समीकरण निकाय को हल कीजिए।

$2x - 3y + 5z = 11$
$3x + 2y - 4z = -5$
$x + y - 2z = -3$

16. 4 kg प्याज, 3 kg गेहूँ और 2 kg चावल का मूल्य Rs 60 है। 2 kg प्याज, 4 kg गेहूँ और 6 kg चावल का मूल्य Rs 90 है। 6 kg प्याज, 2 kg और 3 kg चावल का मूल्य Rs 70 है। आव्यूह विधि द्वारा प्रत्येक का मूल्य प्रति kg ज्ञात कीजिए।

© NCERT not to be republished

विविध उदाहरण

उदहारण 30 यदि a, b, c धनात्मक और भिन्न हैं तो दिखाइए कि सारणिक

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$$ का मान ऋणात्मक है।

हल $C_1 \to C_1 + C_2 + C_3$ का प्रयोग करने पर

$$\Delta = \begin{vmatrix} a+b+c & b & c \\ a+b+c & c & a \\ a+b+c & a & b \end{vmatrix} = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & c & a \\ 1 & a & b \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & c-b & a-c \\ 0 & a-b & b-c \end{vmatrix}$$ ($R_2 \to R_2 - R_1$, और $R_3 \to R_3 - R_1$ का प्रयोग करने पर)

$= (a+b+c)\,[(c-b)(b-c) - (a-c)(a-b)]$ (C_1 के अनुदिश प्रसरण करने पर)

$= (a+b+c)(-a^2 - b^2 - c^2 + ab + bc + ca)$

$= \dfrac{-1}{2}(a+b+c)(2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca)$

$= \dfrac{-1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2]$

जो ऋणात्मक है (क्योंकि $a+b+c > 0$ और $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 > 0$)

उदाहरण 31 यदि a, b, c समांतर श्रेढ़ी में हों तो निम्नलिखित सारणिक का मान ज्ञात कीजिए

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2y+4 & 5y+7 & 8y+a \\ 3y+5 & 6y+8 & 9y+b \\ 4y+6 & 7y+9 & 10y+c \end{vmatrix}$$

हल $R_1 \to R_1 + R_3 - 2R_2$ का प्रयोग करने पर

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3y+5 & 6y+8 & 9y+b \\ 4y+6 & 7y+9 & 10y+c \end{vmatrix} = 0$$ (क्योंकि $2b = a + c$)

उदाहरण 32 दर्शाइए कि सारणिक

$$\Delta = \begin{vmatrix} (y+z)^2 & xy & zx \\ xy & (x+z)^2 & yz \\ xz & yz & (x+y)^2 \end{vmatrix} = 2xyz\,(x+y+z)^3$$

हल सारणिक में $R_1 \to xR_1, R_2 \to yR_2, R_3 \to zR_3$ का प्रयोग करने और xyz, से भाग करने पर हम प्राप्त करते हैं कि सारणिक

$$\Delta = \frac{1}{xyz}\begin{vmatrix} x(y+z)^2 & x^2 y & x^2 z \\ xy^2 & y(x+z)^2 & y^2 z \\ xz^2 & yz^2 & z(x+y)^2 \end{vmatrix}$$

C_1, C_2 और C_3 से क्रमशः x, y, z उभयनिष्ठ लेने पर,

$$\Delta = \frac{xyz}{xyz}\begin{vmatrix} (y+z)^2 & x^2 & x^2 \\ y^2 & (x+z)^2 & y^2 \\ z^2 & z^2 & (x+y)^2 \end{vmatrix}$$

$C_2 \to C_2 - C_1, C_3 \to C_3 - C_1$, का प्रयोग करने पर हम प्राप्त करते हैं कि

$$\Delta = \begin{vmatrix} (y+z)^2 & x^2-(y+z)^2 & x^2-(y+z)^2 \\ y^2 & (x+z)^2-y^2 & 0 \\ z^2 & 0 & (x+y)^2-z^2 \end{vmatrix}$$

अब C_2 और C_3 से $(x+y+z)$ उभयनिष्ठ लेने पर, प्राप्त सारणिक

$$\Delta = (x+y+z)^2\begin{vmatrix} (y+z)^2 & x-(y+z) & x-(y+z) \\ y^2 & (x+z)-y & 0 \\ z^2 & 0 & (x+y)-z \end{vmatrix}$$

$R_1 \to R_1 - (R_2 + R_3)$ का प्रयोग करने पर हम निम्नलिखित सारणिक प्राप्त करते हैं

$$\Delta = (x+y+z)^2\begin{vmatrix} 2yz & -2z & -2y \\ y^2 & x-y+z & 0 \\ z^2 & 0 & x+y-z \end{vmatrix}$$

© NCERT not to be republished

$C_2 \to (C_2 + \frac{1}{y} C_1)$ और $C_3 \to \left(C_3 + \frac{1}{z} C_1\right)$ का प्रयोग करने पर प्राप्त सारणिक

$$\Delta = (x+y+z)^2 \begin{vmatrix} 2yz & 0 & 0 \\ y^2 & x+z & \frac{y^2}{z} \\ z^2 & \frac{z^2}{y} & x+y \end{vmatrix}$$

R_1 के अनुदिश प्रसरण करने पर

$$\Delta = (x+y+z)^2 (2yz) [(x+z)(x+y) - yz] = (x+y+z)^2 (2yz)(x^2+xy+xz)$$

$= (x+y+z)^3 (2xyz)$ प्राप्त होता है।

उदाहरण 33 आव्यूहों के गुणनफल $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 9 & 2 & -3 \\ 6 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ का प्रयोग करते हुए निम्नलिखित समीकरण निकाय को हल कीजिए:

$$x - y + 2z = 1$$
$$2y - 3z = 1$$
$$3x - 2y + 4z = 2$$

हल दिया गया गुणनफल $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 9 & 2 & -3 \\ 6 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} -2-9+12 & 0-2+2 & 1+3-4 \\ 0+18-18 & 0+4-3 & 0-6+6 \\ -6-18+24 & 0-4+4 & 3+6-8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

अत: $$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 9 & 2 & -3 \\ 6 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

© NCERT not to be republished

अब दिए गए समीकरण निकाय को आव्यूह के रूप निम्नलिखित रूप में लिखा जा सकता है

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

या $$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 9 & 2 & -3 \\ 6 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2+0+2 \\ 9+2-6 \\ 6+1-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

अत: $x = 0, y = 5$ और $z = 3$

उदाहरण 34 सिद्ध कीजिए कि सारणिक

$$\Delta = \begin{vmatrix} a+bx & c+dx & p+qx \\ ax+b & cx+d & px+q \\ u & v & w \end{vmatrix} = (1-x^2)\begin{vmatrix} a & c & p \\ b & d & q \\ u & v & w \end{vmatrix}$$

हल सारणिक Δ पर $R_1 \to R_1 - x R_2$ का प्रयोग करने पर हमें

$$D = \begin{vmatrix} a(1-x^2) & c(1-x^2) & p(1-x^2) \\ ax+b & cx+d & px+q \\ u & v & w \end{vmatrix}$$ प्राप्त होता है

$$= (1-x^2)\begin{vmatrix} a & c & p \\ ax+b & cx+d & px+q \\ u & v & w \end{vmatrix}$$

$R_2 \to R_2 - x R_1$, का प्रयोग करने पर हमें सारणिक

$$\Delta = (1-x^2)\begin{vmatrix} a & c & p \\ b & d & q \\ u & v & w \end{vmatrix}$$ प्राप्त होता है।

© NCERT not to be republished

अध्याय 4 पर विविध प्रश्नावली

1. सिद्ध कीजिए कि सारणिक $\begin{vmatrix} x & \sin\theta & \cos\theta \\ -\sin\theta & -x & 1 \\ \cos\theta & 1 & x \end{vmatrix}$, θ से स्वतंत्र है।

2. सारणिक का प्रसरण किए बिना सिद्ध कीजिए कि $\begin{vmatrix} a & a^2 & bc \\ b & b^2 & ca \\ c & c^2 & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} \cos\alpha\cos\beta & \cos\alpha\sin\beta & -\sin\alpha \\ -\sin\beta & \cos\beta & 0 \\ \sin\alpha\cos\beta & \sin\alpha\sin\beta & \cos\alpha \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए।

4. यदि a, b और c वास्तविक संख्याएँ हो और सारणिक

$$\Delta = \begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ c+a & a+b & b+c \\ a+b & b+c & c+a \end{vmatrix} = 0$$

हो तो दर्शाइए कि या तो $a + b + c = 0$ या $a = b = c$ है।

5. यदि $a \neq 0$ हो तो समीकरण $\begin{vmatrix} x+a & x & x \\ x & x+a & x \\ x & x & x+a \end{vmatrix} = 0$ को हल कीजिए।

6. सिद्ध कीजिए कि $\begin{vmatrix} a^2 & bc & ac+c^2 \\ a^2+ab & b^2 & ac \\ ab & b^2+bc & c^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2$

7. यदि $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -15 & 6 & -5 \\ 5 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ और $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$, हो तो $(AB)^{-1}$ का मान ज्ञात कीजिए।

© NCERT not to be republished

8. मान लीजिए $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ हो तो सत्यापित कीजिए कि

(i) $[adj\ A]^{-1} = adj\ (A^{-1})$ (ii) $(A^{-1})^{-1} = A$

9. $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए।

10. $\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x+y & y \\ 1 & x & x+y \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए।

सारणिकों के गुणधर्मों का प्रयोग करके निम्नलिखित 11 से 15 तक प्रश्नों को सिद्ध कीजिए:

11. $\begin{vmatrix} \alpha & \alpha^2 & \beta+\gamma \\ \beta & \beta^2 & \gamma+\alpha \\ \gamma & \gamma^2 & \alpha+\beta \end{vmatrix} = (\beta-\gamma)\ (\gamma-\alpha)\ (\alpha-\beta)\ (\alpha+\beta+\gamma)$

12. $\begin{vmatrix} x & x^2 & 1+px^3 \\ y & y^2 & 1+py^3 \\ z & z^2 & 1+pz^3 \end{vmatrix} = (1+pxyz)\ (x-y)\ (y-z)\ (z-x),$

13. $\begin{vmatrix} 3a & -a+b & -a+c \\ -b+a & 3b & -b+c \\ -c+a & -c+b & 3c \end{vmatrix} = 3(a+b+c)\ (ab+bc+ca)$

14. $\begin{vmatrix} 1 & 1+p & 1+p+q \\ 2 & 3+2p & 4+3p+2q \\ 3 & 6+3p & 10+6p+3q \end{vmatrix} = 1$

15. $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & \cos(\alpha+\delta) \\ \sin\beta & \cos\beta & \cos(\beta+\delta) \\ \sin\gamma & \cos\gamma & \cos(\gamma+\delta) \end{vmatrix} = 0$

16. निम्नलिखित समीकरण निकाय को हल कीजिए

$$\frac{2}{x} + \frac{3}{y} + \frac{10}{z} = 4$$

$$\frac{4}{x} - \frac{6}{y} + \frac{5}{z} = 1$$

$$\frac{6}{x} + \frac{9}{y} - \frac{20}{z} = 2$$

निम्नलिखित प्रश्नों 17 से 19 में सही उत्तर का चुनाव कीजिए।

17. यदि a, b, c समांतर श्रेढ़ी में हों तो सारणिक

$\begin{vmatrix} x+2 & x+3 & x+2a \\ x+3 & x+4 & x+2b \\ x+4 & x+5 & x+2c \end{vmatrix}$ का मान होगा:

(A) 0 (B) 1 (C) x (D) $2x$

18. यदि x, y, z शून्येतर वास्तविक संख्याएँ हों तो आव्यूह $A = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix}$ का व्युत्क्रम है:

(A) $\begin{bmatrix} x^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & y^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & z^{-1} \end{bmatrix}$ (B) $xyz\begin{bmatrix} x^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & y^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & z^{-1} \end{bmatrix}$

(C) $\frac{1}{xyz}\begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix}$ (D) $\frac{1}{xyz}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

© NCERT not to be republished

19. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & \sin\theta & 1 \\ -\sin\theta & 1 & \sin\theta \\ -1 & -\sin\theta & 1 \end{bmatrix}$, जहाँ $0 \le \theta \le 2\pi$ हो तो:

(A) $\det(A) = 0$ (B) $\det(A) \in (2, \infty)$

(C) $\det(A) \in (2, 4)$ (D) $\det(A) \in [2, 4]$.

सारांश

- आव्यूह $A = [a_{11}]_{1\times 1}$ का सारणिक $|a_{11}|_{1\times 1} = a_{11}$ के द्वारा दिया जाता है।

- आव्यूह $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ का सारणिक

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}$$ के द्वारा दिया जाता है।

- आव्यूह $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$ के सारणिक का मान (R_1 के अनुदिश प्रसरण से) निम्नलिखित रूप द्वारा दिया जाता है।

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

किसी वर्ग आव्यूह A के लिए, |A| निम्नलिखित गुणधर्मों को संतुष्ट करता है।

- $|A'| = |A|$, जहाँ $A' = A$ का परिवर्त है।
- यदि हम दो पंक्तियों या स्तंभों को परस्पर बदल दें तो सारणिक का चिह्न बदल जाता है।
- यदि सारणिक की कोई दो पंक्ति या स्तंभ समान या समानुपाती हों तो सारणिक का मान शून्य होता है।
- यदि हम एक सारणिक की एक पंक्ति या स्तंभ को अचर k, से गुणा कर दें तो सारणिक का मान k गुना हो जाता है।

© NCERT not to be republished

- एक सारणिक को k से गुणा करने का अर्थ है कि उसके अंदर केवल किसी एक पंक्ति या स्तंभ के अवयवों को k से गुणा करना।
- यदि $A = [a_{ij}]_{3\times3}$, तो $|k.A| = k^3 |A|$
- यदि एक सारणिक के एक पंक्ति या स्तंभ के अवयव दो या अधिक अवयवों के योग के रूप में व्यक्त किए जा सकते हों तो उस दिए गए सारणिक को दो या अधिक सारणिकों के योग के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।
- यदि एक सारणिक के किसी एक पंक्ति या स्तंभ के प्रत्येक अवयव के समगुणज अन्य पंक्ति या स्तंभ के संगत अवयवों में जोड़ दिए जाते हैं तो सारणिक का मान अपरिवर्तित रहता है।
- (x_1, y_1), (x_2, y_2) और (x_3, y_3) शीर्षों वाली त्रिभुज का क्षेत्रफल निम्नलिखित रूप द्वारा दिया जाता है:

$$\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

- दिए गए आव्यूह A के सारणिक के एक अवयव a_{ij} का उपसारणिक, i वीं पंक्ति और j वां स्तंभ हटाने से प्राप्त सारणिक होता है और इसे M_{ij} द्वारा व्यक्त किया जाता है।
- a_{ij} का सहखंड $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ द्वारा दिया जाता है।
- A के सारणिक का मान $|A| = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + a_{13} A_{13}$ है और इसे एक पंक्ति या स्तंभ के अवयवों और उनके संगत सहखंडों के गुणनफल का योग करके प्राप्त किया जाता है।
- यदि एक पंक्ति (या स्तंभ) के अवयवों और अन्य दूसरी पंक्ति (या स्तंभ) के सहखंडों की गुणा कर दी जाए तो उनका योग शून्य होता है उदाहरणतया

  $a_{11} A_{21} + a_{12} A_{22} + a_{13} A_{23} = 0$
- यदि आव्यूह $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, तो सहखंडज $adj\ A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$ होता है, जहाँ a_{ij} का सहखंड A_{ij} है।
- $A\,(adj\ A) = (adj\ A)\,A = |A|\,I$, जहाँ A, n कोटि का वर्ग आव्यूह है।
- यदि कोई वर्ग आव्यूह क्रमशः अव्युत्क्रमणीय या व्युत्क्रमणीय कहलाता है यदि $|A| = 0$ या $|A| \neq 0$

not to be republished © NCERT

- यदि $AB = BA = I$, जहाँ B एक वर्ग आव्यूह है तब A का व्युत्क्रम B होता है और $A^{-1} = B$ या $B^{-1} = A$ और इसलिए $(A^{-1})^{-1} = A$
- किसी वर्ग आव्यूह A का व्युत्क्रम है यदि और केवल यदि A व्युत्क्रमणीय है।
- $A^{-1} = \frac{1}{|A|}(adj\, A)$
- यदि
$$a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1$$
$$a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2$$
$$a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3$$
तब इन समीकरणों को $AX = B$ के रूप में लिखा जा सकता है।

जहाँ $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ और $B = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$

- समीकरण $AX = B$ का अद्वितीय हल $X = A^{-1}B$ द्वारा दिया जाता है जहाँ $|A| \neq 0$
- समीकरणों का एक निकाय संगत या असंगत होता है यदि इसके हल का अस्तित्व है अथवा नहीं है।
- आव्यूह समीकरण $AX = B$ में एक वर्ग आव्यूह A के लिए
  (i) यदि $|A| \neq 0$, तो अद्वितीय हल का अस्तित्व है।
  (ii) यदि $|A| = 0$ और $(adj\, A)\, B \neq O$, तो किसी हल का अस्तित्व नहीं है।
  (iii) यदि $|A| = 0$ और $(adj\, A)\, B = O$, तो निकाय संगत या असंगत होती है।

ऐतिहासिक पृष्ठभूमि

गणना बोर्ड पर छड़ों का प्रयोग करके कुछ रैखिक समीकरणों की अज्ञात राशियों के गुणांकों को निरूपित करने की चीनी विधि ने वास्तव में विलोपन की साधारण विधि की खोज करने में सहायता की है। छड़ों की व्यवस्था क्रम एक सारणिक में संख्याओं की उचित व्यवस्था क्रम जैसी थी। इसलिए एक सारणिक की सरलीकरण में स्तंभों या पंक्तियों के घटाने का विचार उत्पन्न करने में चीनी प्रथम विचारकों में थे (‘Mikami, China, pp 30, 93).

सत्रहवीं शताब्दी के महान जापानी गणितज्ञ Seki Kowa द्वारा 1683 में लिखित पुस्तक 'Kai Fukudai no Ho' से ज्ञात होता है कि उन्हें सारणिकों और उनके प्रसार का ज्ञान था। परंतु

© NCERT not to be republished

उन्होंने इस विधि का प्रयोग केवल दो समीकरणों से एक राशि के विलोपन में किया परंतु युगपत रैखिक समीकरणों के हल ज्ञात करने में इसका सीधा प्रयोग नहीं किया था। 'T. Hayashi, "The Fakudoi and Determinants in Japanese Mathematics," in the proc. of the Tokyo Math. Soc., V.

Vendermonde पहले व्यक्ति थे जिन्होनें सारणिकों को स्वतंत्र फलन की तरह से पहचाना इन्हें विधिवत इसका अन्वेषक (संस्थापक) कहा जा सकता है। Laplace (1772) ने सारणिकों को इसके पूरक उपसारणिकों के रूप में व्यक्त करके प्रसरण की व्यापक विधि दी। 1773 में Lagrange ने दूसरे व तीसरे क्रम के सारणिकों को व्यवहृत किया और सारणिकों के हल के अतिरिक्त उनका अन्यत्र भी प्रयोग किया। 1801 में Gauss ने संख्या के सिद्धांतों में सारणिकों का प्रयोग किया।

अगले महान योगदान देने वाले Jacques - Philippe - Marie Binet, (1812) थे जिन्होंने m-स्तंभों और n-पंक्तियों के दो आव्यूहों के गुणनफल से संबंधित प्रमेय का उल्लेख किया जो विशेष स्थिति $m = n$ में गुणनफल प्रमेय में बदल जाती है।

उसी दिन Cauchy (1812) ने भी उसी विषय-वस्तु पर शोध प्रस्तुत किए। उन्होंने आज के व्यावहारिक सारणिक शब्द का प्रयोग किया। उन्होंने Binet से अधिक संतुष्ट करने वाली गुणनफल प्रमेय की उपपत्ति दी।

इन सिद्धांतों पर महानतम योगदान वाले Carl Gustav Jacob Jacobi थे। इसके पश्चात सारणिक शब्द को अंतिम स्वीकृति प्राप्त हुई।

© NCERT not to be republished